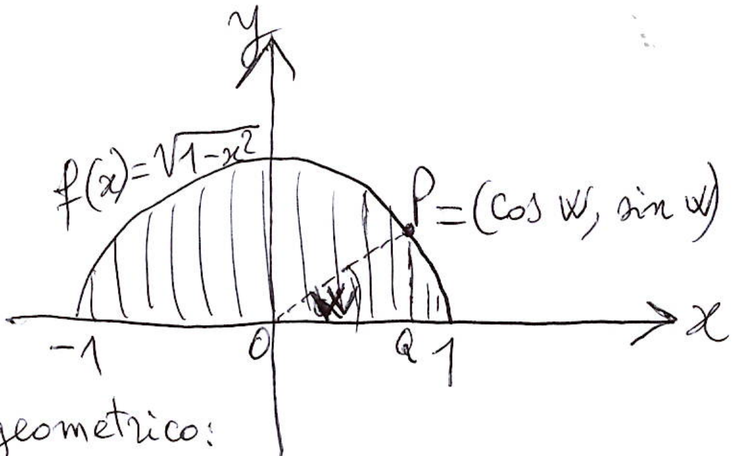
 AREA DEL SEMICERCHIO

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$



Significato geometrico:

I = area del semicerchio in figura

(infatti, essendo $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$, otteniamo $y^2 = 1-x^2$, cioè $x^2+y^2=1$, equazione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che si chiama anche CIRCONFERENZA GONIOMETRICA.

ESERCIZIO: Calcolare per sostituzione l'integrale I

Qual è una sostituzione che conviene fare?

$\boxed{x = \cos w}$. Da dove "sbuca"? Dal fatto che, dalla definizione di seno e coseno, le coordinate (x,y) del punto P in figura sono rispettivamente $x = \cos w$, $y = \sin w$. Ma, se $x = \cos w$, essendo $\sin^2 w + \cos^2 w = 1$ (identità fondamentale) otteniamo $1-\cos^2 w = \sin^2 w$, e quindi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 w} = \sin w$ (prendiamo il valore positivo perché siamo nel I e II Quadrante, e lì il seno è positivo). Inoltre

$dx = \frac{dx}{dw}\, dw = x'(w)\, dw = -\sin w\, dw$

Ricapitolando:

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad x = \cos w \quad \sqrt{1-x^2} = \sin w$$
$$dx = -\sin w\, dw$$

Consideriamo ora l'integrale INDEFINITO

$K = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Si ha: $K = \int \sin w \cdot (-\sin w)\, dw =$

$= -\int \sin^2 w\, dw =$ (vedi "Integrali doppi, testo adottato, p. 50)

$$= -\left(\frac{-\cos w \sin w + w}{2}\right) + c = \frac{\cos w \sin w - w}{2} + c$$

A questo punto ci sono due modi per proseguire.

<u>1° modo</u>: Torniamo alla variabile x: sappiamo che $\cos w = x$, $\sin w = \sqrt{1-x^2}$, $w = \arccos x$, e quindi

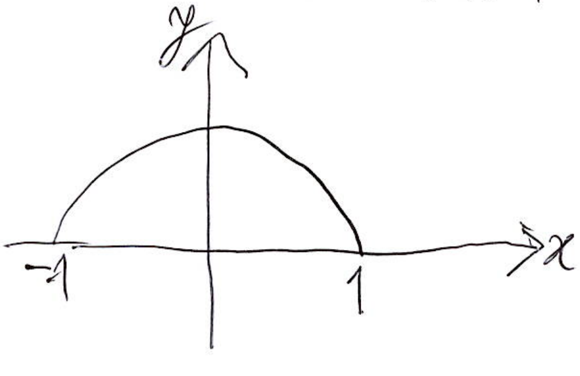
$K = \dfrac{x \cdot \sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2} + c$. Applicando ora la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE RISPETTO AGLI ESTREMI DI PARTENZA -1 ed 1, si ha

$$I = \left[\frac{x \cdot \sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\Big(1 \cdot \underbrace{\sqrt{1-1^2}}_{=0} - \underbrace{\arccos 1}_{0,\ \text{perché } \cos 0 = 1} -$$

$$- (-1) \cdot \underbrace{\sqrt{1-(-1)^2}}_{=0} + \arccos(-1)\Big) = \frac{\arccos(-1)}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ perché } \cos \pi = -1$$

Otteniamo dunque che I, l'area del semicerchio di centro l'origine e raggio 1, è $\frac{\pi}{2}$, cosa che già sappiamo dalla Geometria elementare (area del cerchio di raggio $R = \pi R^2$)

-3- AREA DEL SEMICERCHIO



<u>2° modo:</u> Sappiamo che

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x = \cos w \quad \sqrt{1-x^2} = \sin w$

$dx = -\sin w \, dw$

$$K = \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\cos w \sin w - w}{2} + c$$

Applichiamo la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE questa volta rispetto alla variabile w. Allora <u>BISOGNA CAMBIARE GLI ESTREMI</u> x varia tra -1 ed 1

Siccome $x = \cos w$, allora $w = \arccos x$, e quindi w varia tra $\arccos(-1) = \pi$ (perché $\cos \pi = -1$) e $\arccos(1) = 0$ (perché $\cos 0 = 1$), e pertanto

$$I = \left[\frac{\cos w \sin w - w}{2}\right]_{\pi}^{0} = \underset{\parallel \atop 0}{\frac{\cos 0 \overset{0}{\sin 0} - 0}{2}} - \frac{\cos \pi \overset{0}{\sin \pi} - \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ottenendo lo stesso risultato che avevamo trovato nel 1° modo.